反応拡散系への特異摂動法の応用

富山大学大学院理工学研究部

池田榮雄

非線形数理　秋の学校
(2007年9月25日～27日)

反応拡散系への応用

$$\begin{cases} u_s = d_1 u_{yy} + \frac{1}{\sigma} f(u,v) \\ v_s = d_2 v_{yy} + \sigma g(u,v) \end{cases}, s > 0,\ y \in \mathbf{R}$$

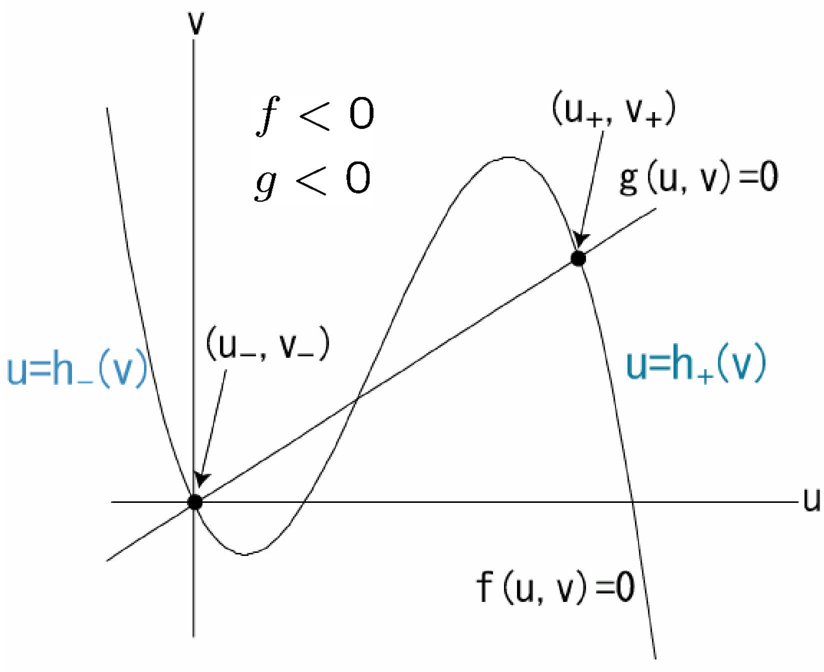
d_1, d_2 ：拡散係数　　　σ ：反応率

Bonhoeffer-Van der Pol Kinetics:

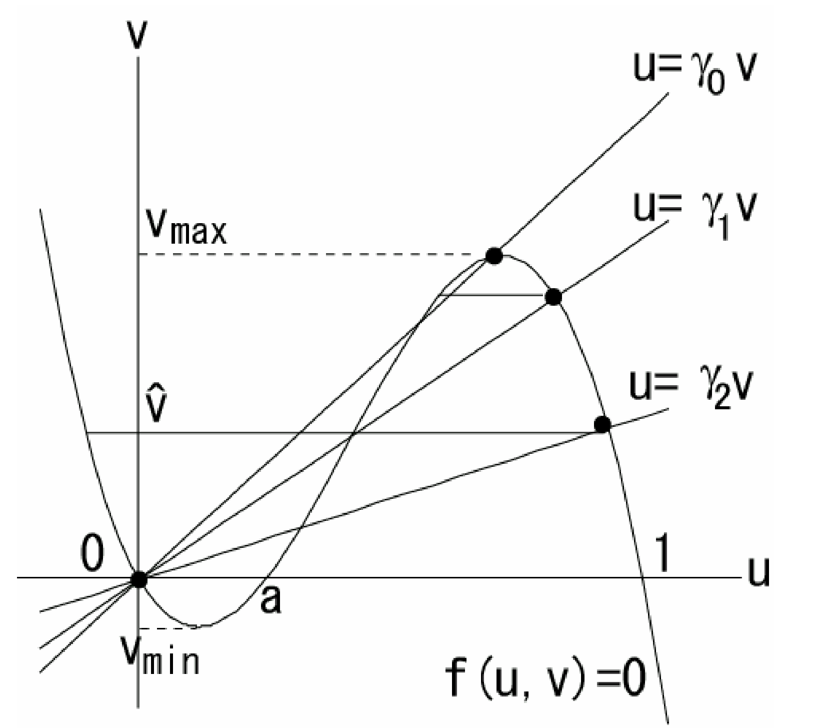
$$\begin{cases} f(u,v) = u(1-u)(u-a) - v \\ g(u,v) = u - \gamma v \end{cases}, 0 < a < 1,\ \gamma > 0$$

変換： $s = \sigma t,\ x = y\sqrt{\frac{\sigma}{d_2}},\ \varepsilon = \sigma\sqrt{\frac{d_1}{d_2}},\ \tau = \sigma\sqrt{\frac{d_2}{d_1}}$

$$\begin{cases} \varepsilon\tau u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u,v) \\ v_t = v_{xx} + g(u,v) \end{cases}, t > 0,\ x \in \mathbf{R}$$



v
$f < 0$
$g < 0$
(u_+, v_+)
g (u, v) =0
(u_-, v_-)
$u=h_-(v)$
$u=h_+(v)$
u
f (u, v) =0



v
$u=\gamma_0 v$
$u=\gamma_1 v$
$u=\gamma_2 v$
v_{max}
$\hat{v}$
0
1
u
a
v_{min}
f (u, v) =0

$\varepsilon > 0$ は十分小さい と仮定し，速度 $c = c(\tau)$ の進行波解 $(u, v)(x + ct)$ を考える

動座標系：$z = x + ct$

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{zz} - \varepsilon\tau c u_z + f(u, v) = 0 \\ v_{zz} - c v_z + g(u, v) = 0 \end{cases}, z \in \mathbf{R}$$

境界条件：

$$(u, v)(\pm\infty) = (u_\pm, v_\pm)$$

典型的な特異摂動問題

$\alpha \in (u_-, u_+)$ を任意に固定

内部遷移層の現れる場所 $z = 0$ で2つの区間に分割

$$(A0) \begin{cases} \varepsilon^2 (u_\pm)_{zz} - \varepsilon\tau c (u_\pm)_z + f(u_\pm, v_\pm) = 0 \\ (v_\pm)_{zz} - c (v_\pm)_z + g(u_\pm, v_\pm) = 0 \\ u_\pm(\pm\infty) = u_\pm, u_\pm(0) = \alpha \\ v_\pm(\pm\infty) = v_\pm, u_\pm(0) = \beta \end{cases}, z \in \mathbf{R}_\pm$$

但し $\beta \in (v_-, v_+)$ 後で決める

外部解の構成 - - - 第0近似解　(高次の近似解の構成は容易)

$$\begin{cases} f(U_\pm, V_\pm) = 0 \\ (V_\pm)_{zz} - c(V_\pm)_z + g(U_\pm, V_\pm) = 0 \\ V_\pm(\pm\infty) = v_\pm, V_\pm(0) = \beta \end{cases}, z \in \mathbf{R}_\pm$$

$$f(U_\pm, V_\pm) = 0 \implies U_\pm = h_\pm(V_\pm)$$

$$(A1) \quad \begin{cases} (V_\pm)_{zz} - c(V_\pm)_z + g(h_\pm(V_\pm), V_\pm) = 0 & , z \in \mathbf{R}_\pm \\ V_\pm(\pm\infty) = v_\pm, V_\pm(0) = \beta \end{cases}$$

補題 A1　任意の $c \in \mathbf{R}$, 任意の $\beta \in (v_-, v_+)$ に対して, (A1) の単調増大解 $V_0^\pm(z; c, \beta)$ はただ1つ存在して以下を満たす。

(i)　$V_0^\pm(z; c, \beta) - v_\pm \in X^2_{\mu(c),1}(\mathbf{R}_\pm)$

(ii)　$\frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{d}{dz}V_0^-(0; c, \beta) - \frac{d}{dz}V_0^+(0; c, \beta)\right] > 0$

(iii)　$\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{d}{dz}V_0^-(0; c, \beta) - \frac{d}{dz}V_0^+(0; c, \beta)\right] > 0$

但し, $\mu(c) = \min\{\mu_-(c), \mu_+(c)\}$, $\mu_\pm(c)$ は

$$\mu_\pm^2 - c\mu_\pm + \frac{d}{dv}g(h_\pm(v_\pm), v_\pm) = 0$$

の正の解である。

補題A2 任意の $c \in \mathbf{R}$ に対して，$\beta = \beta_0(c)$ が存在して

$$\frac{d}{dz}V_0^-(0; c, \beta_0(c)) - \frac{d}{dz}V_0^+(0; c, \beta_0(c)) = 0$$

が成り立つ。$\beta_0(c)$ は単調減少関数で $\lim_{c \to \mp\infty} \beta_0(c) = v_\pm$ を満たし，任意の $v^* \in (v_-, v_+)$ に対して

$$\beta_0(0) \lesseqqgtr v^* \text{ if and only if } \quad \mathcal{I}(v^*) = \int_{v_-}^{v^*} g(h_-(v), v)dv + \int_{v^*}^{v^+} g(h_+(v), v)dv \lesseqqgtr 0$$

が成り立つ。

$$U_0^\pm(z; c, \beta) = h_\pm(V_0^\pm(z; c, \beta))$$

第0近似の外部解 $(U_0^\pm(z; c, \beta), V_0^\pm(z; c, \beta))$

$U_0^\pm(0; c, \beta) = h_\pm(V_0^\pm(0; c, \beta)) = h_\pm(\beta) \neq \alpha$ は境界条件を満たさない

外部解の修正

内部解の構成 - - - 第0近似解　(高次の近似解の構成は容易)

$$(u_\pm(z;c,\beta), v_\pm(z;c,\beta)) = (U_0^\pm(z;c,\beta) + W_0^\pm(\xi;c,\beta), V_0^\pm(z;c,\beta))$$

$$\xi = x/\varepsilon^\kappa$$

$$(A2)_\pm \begin{cases} \varepsilon^{2-2\kappa}(W_0^\pm)_{\xi\xi} - \varepsilon^{1-\kappa}\tau c(W_0^\pm)_\xi + f(h_\pm(\beta) + W_0^\pm, \beta) = 0 \quad , \xi \in \mathbf{R}_\pm \\ W_0^\pm(\pm\infty) = 0, \ W_0^\pm(0) = \alpha - h_\pm(\beta) \end{cases}$$

$$\kappa = 1$$

補題 A3 (Fife and McLeod)　任意の $\beta \in (v_-, v_+)$ に対して

$$(A3) \begin{cases} W_{\xi\xi} - cW_\xi + f(W,\beta) = 0 \quad , \xi \in \mathbf{R} \\ W(\pm\infty) = h_\pm(\beta), \ W(0) = \alpha \end{cases}$$

を考える。関係 $c = c_0(\beta)$ が定まり，(A3) の単調増大解 $W(\xi;\beta)$ はただ 1 つ存在して以下を満たす。

(i)　$W(\xi;\beta) - h_\pm(\beta) \in X^2_{\sigma_\pm(\beta),1}(\mathbf{R}_\pm)$

(ii)　$c_0(\beta) \gtreqless 0$ if and only if $\mathcal{J}(\beta) = \int_{h_-(\beta)}^{h_+(\beta)} f(u,\beta)du \gtreqless 0$

但し，$\sigma_\pm(\beta) = \{\mp c_0(\beta) + \sqrt{(c_0(\beta))^2 - 4f_u(h_\pm(\beta),\beta)}\}/2$ である。

$\beta^* \in (v_-, v_+)$ 任意に固定

補題 A4 $c^*(\tau) = c_0(\beta^*)/\tau$, $\sigma_\pm(c, \beta; \tau) = \{\mp c\tau + \sqrt{(c\tau)^2 - 4f_u(h_\pm(\beta), \beta)}\}/2$ とする。任意の $(c, \beta) \in \Lambda_{\delta_0} \equiv \{(c, \beta) | |c - c^*(\tau)| + |\beta - \beta^*| \leqq \delta_0\}$ に対して，(A2)$_\pm$ は $X^2_{\sigma_\pm(\tau),1}(\mathbf{R}_\pm)$ に属するただ１つの単調増大解 $W_0^\pm(\xi; \tau; c, \beta)$ を持つ。但し，$\sigma_\pm(\tau) = \inf_{(c,\beta)\in\Lambda_{\delta_0}} \sigma_\pm(\tau; c, \beta)$. さらに，$W_0^\pm(\xi; \tau; c, \beta)$ は $X^2_{\sigma_\pm(\tau),1}(\mathbf{R}_\pm)$ において $(c, \beta) \in \Lambda_{\delta_0}$ に関して連続でり

(i) $\frac{d}{d\xi} W_0^-(0; \tau; c^*(\tau), \beta^*) - \frac{d}{d\xi} W_0^+(0; \tau; c^*(\tau), \beta^*) = 0$

(ii) $\frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{d}{d\xi} W_0^-(0; \tau; c^*(\tau), \beta^*) - \frac{d}{d\xi} W_0^+(0; \tau; c^*(\tau), \beta^*)\right] > 0$

(iii) $\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{d}{d\xi} W_0^-(0; \tau; c^*(\tau), \beta^*) - \frac{d}{d\xi} W_0^+(0; \tau; c^*(\tau), \beta^*)\right] > 0$

を満たす。

合成解の構成 - - - 第０近似解　(高次の近似解の構成は容易)

$$(u_\pm(z; \varepsilon; \tau; c, \beta), v_\pm(z; c, \beta)) = (U_0^\pm(z; c, \beta) + W_0^\pm(z/\varepsilon; \tau; c, \beta), V_0^\pm(z; c, \beta)) \ , z \in \mathbf{R}_\pm$$

合成解を利用して解の存在を示す

$$\begin{cases} u_\pm(z;\varepsilon;\tau;c,\beta) & = & U_0^\pm(z;c,\beta) + W_0^\pm(z/\varepsilon;\tau;c,\beta) + r^\pm(z;\varepsilon;\tau;c,\beta) \\ & & +h'_\pm(V_0^\pm(z;c,\beta))s^\pm(z;\varepsilon;\tau;c,\beta) \\ v_\pm(z;\varepsilon;\tau;c,\beta) & = & V_0^\pm(z;c,\beta) + \varepsilon^2 Y^\pm(z/\varepsilon;\tau;c,\beta) + s^\pm(z;\varepsilon;\tau;c,\beta) \end{cases}$$

(A0)に代入し, 残差項$(r^\pm, s^\pm)$に対する方程式を導く

陰関数定理を適用し　$(r^\pm, s^\pm)$の存在を示す

$$||r^\pm|| = O(\varepsilon), \;\; ||s^\pm|| = O(\varepsilon)$$

領域全体$\mathbf{R}$における解の構成

$$\begin{cases} \Phi(\varepsilon;\tau;c,\beta) & \equiv & \varepsilon\frac{d}{dz}u^-(0;\varepsilon;\tau;c,\beta) - \varepsilon\frac{d}{dz}u^+(0;\varepsilon;\tau;c,\beta) = 0 \\ \Psi(\varepsilon;\tau;c,\beta) & \equiv & \frac{d}{dz}v^-(0;\varepsilon;\tau;c,\beta) - \frac{d}{dz}v^+(0;\varepsilon;\tau;c,\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi(0;\tau;c,\beta) = \Phi_0(\tau;c,\beta) \\ \Psi(0;\tau;c,\beta) = \Psi_0(c,\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_0(\tau;c,\beta) &= \frac{d}{d\xi}W_0^-(0;\tau;c,\beta) - \frac{d}{d\xi}W_0^+(0;\tau;c,\beta) \\ \Psi_0(c,\beta) &= \frac{d}{dz}V_0^-(0;c,\beta) - \frac{d}{dz}V_0^+(0;c,\beta) \end{cases}$$

Find $(c^*(\tau), \beta^*(\tau))$ such that

$$\Phi_0(\tau;c^*(\tau),\beta^*(\tau)) = \Psi_0(c^*(\tau),\beta^*(\tau)) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial c}\Phi_0(\tau;c^*(\tau),\beta^*(\tau)) & \frac{\partial}{\partial \beta}\Phi_0(\tau;c^*(\tau),\beta^*(\tau)) \\ \frac{\partial}{\partial c}\Psi_0(c^*(\tau),\beta^*(\tau)) & \frac{\partial}{\partial \beta}\Psi_0(c^*(\tau),\beta^*(\tau)) \end{pmatrix} \neq 0$$

陰関数定理より

$$\exists(c^*(\varepsilon;\tau),\beta^*(\varepsilon;\tau)) : \begin{cases} \Phi(\varepsilon;\tau;c^*(\varepsilon;\tau),\beta^*(\varepsilon;\tau)) = 0 \\ \Psi(\varepsilon;\tau;c^*(\varepsilon;\tau),\beta^*(\varepsilon;\tau)) = 0 \end{cases}$$

$$\Phi_0(\tau; c^*(\tau), \beta^*(\tau)) = \Psi_0(c^*(\tau), \beta^*(\tau)) = 0$$

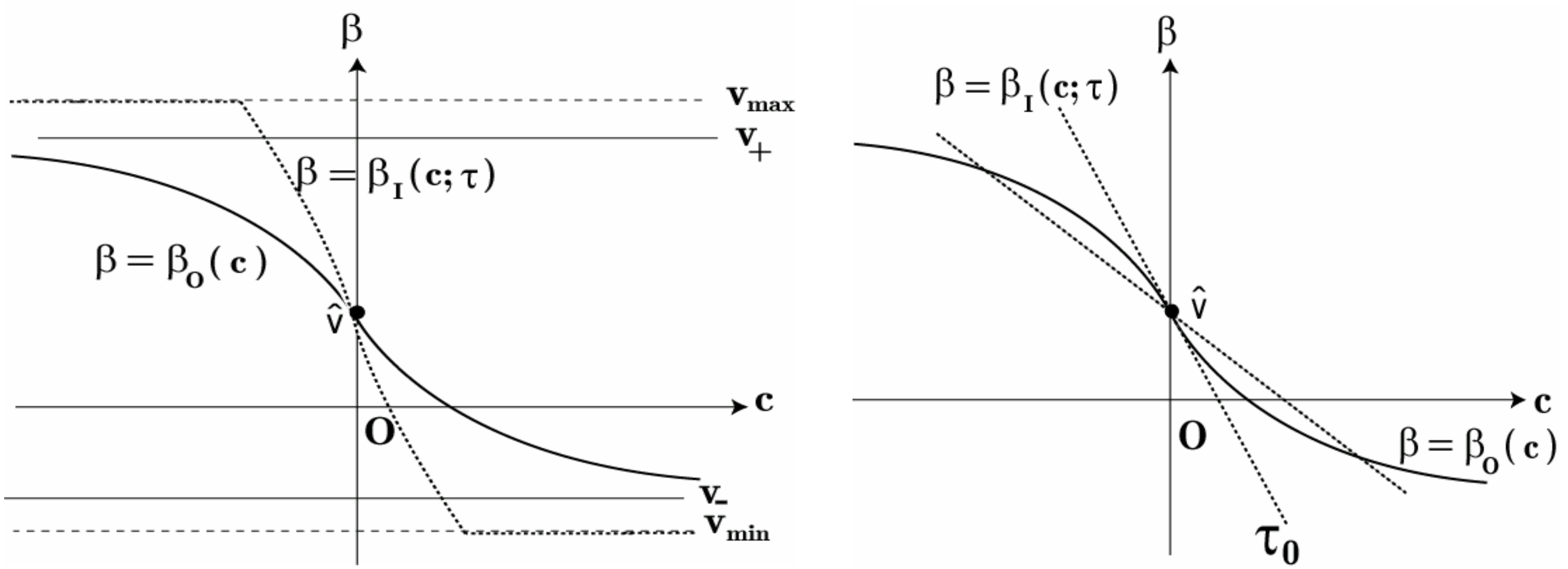
$$\Longleftrightarrow$$

$$c = c_0(\beta)/\tau,\ \ \beta = \beta_0(c) \quad at\ (c, \beta) = (c^*(\tau), \beta^*(\tau))$$

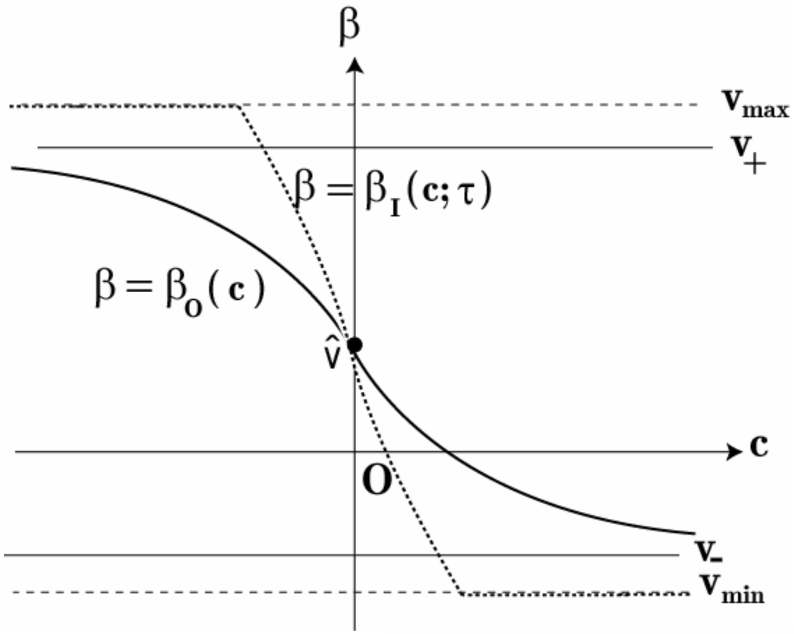
横断的に交差

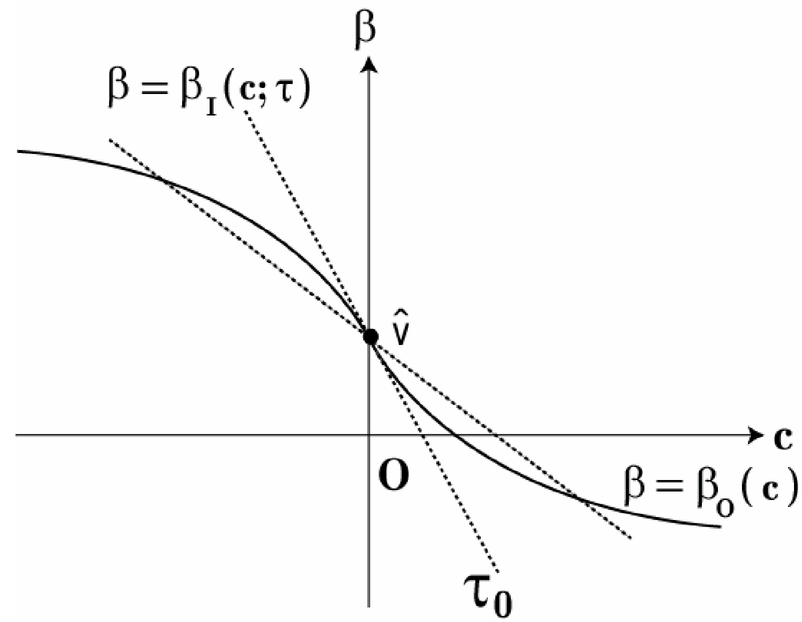
$$c = c_0(\beta)/\tau \iff \beta = \beta_I(c;\tau)$$

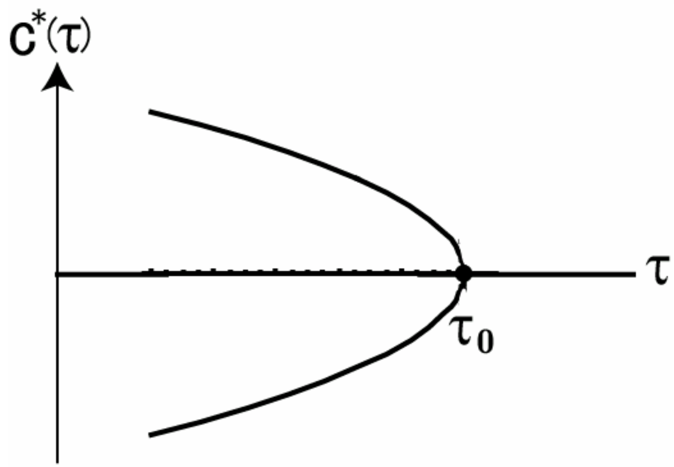
$$\gamma = \gamma_1$$



$\gamma = \gamma_1$

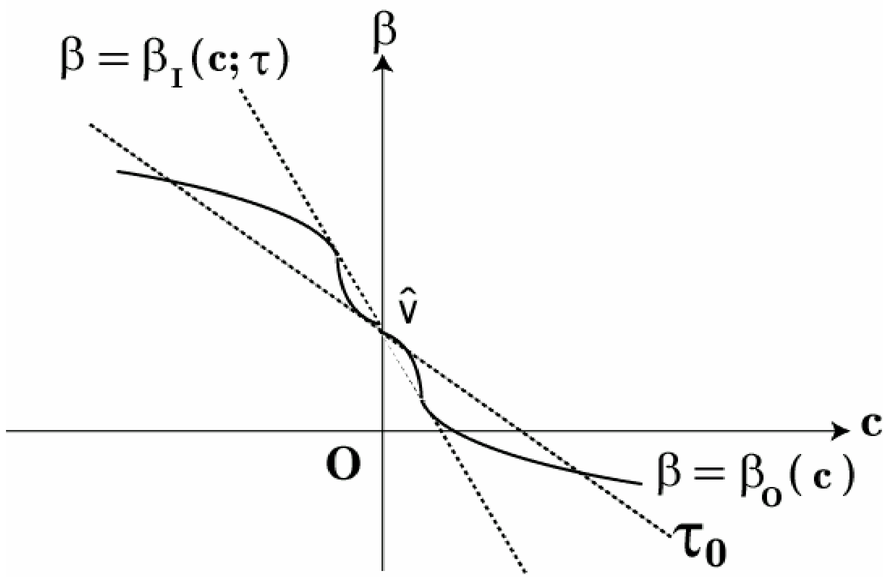


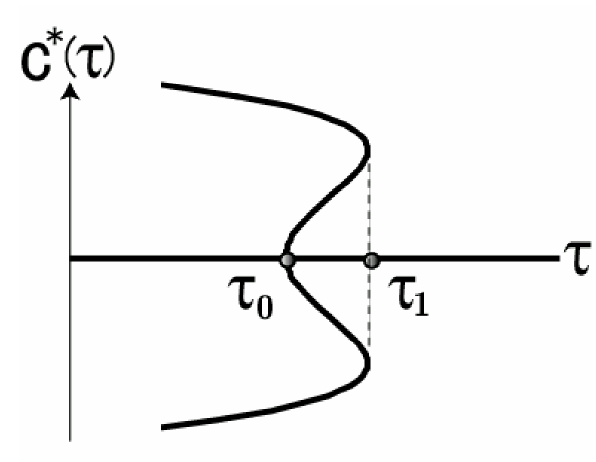




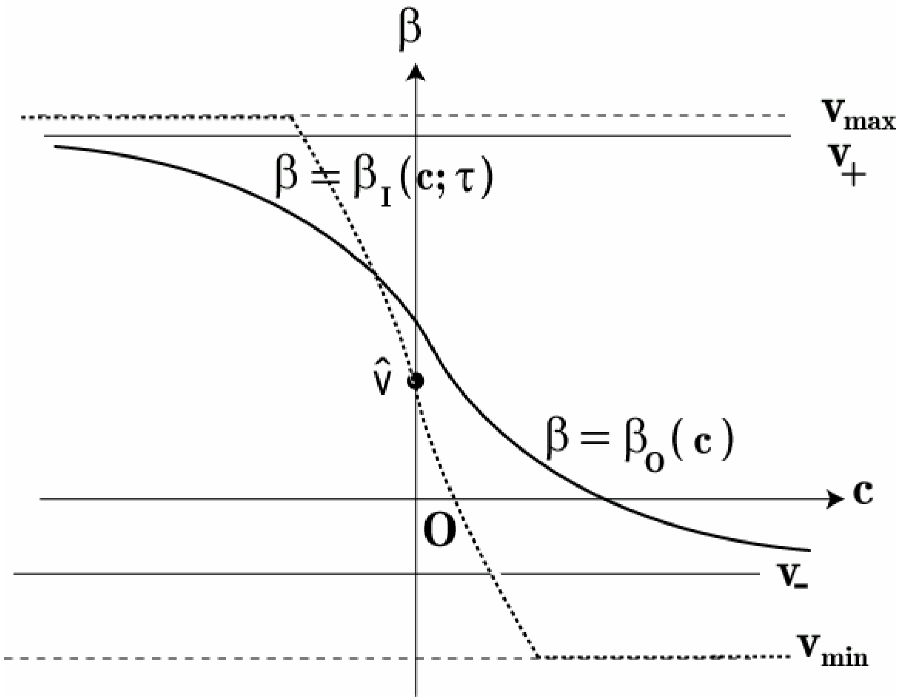
Pitchfork 分岐

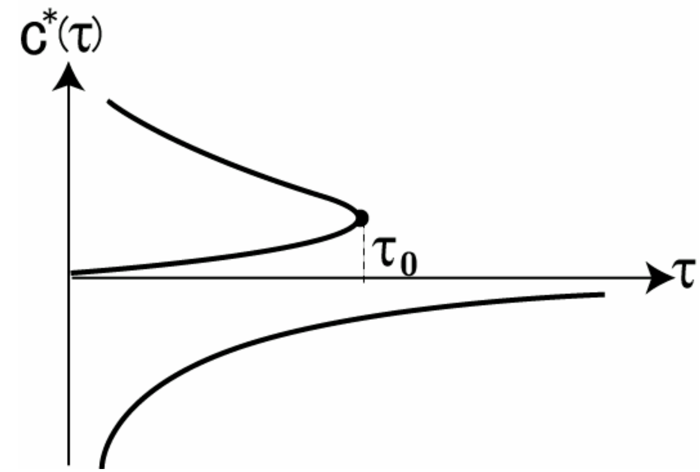
$\gamma = \gamma_1$



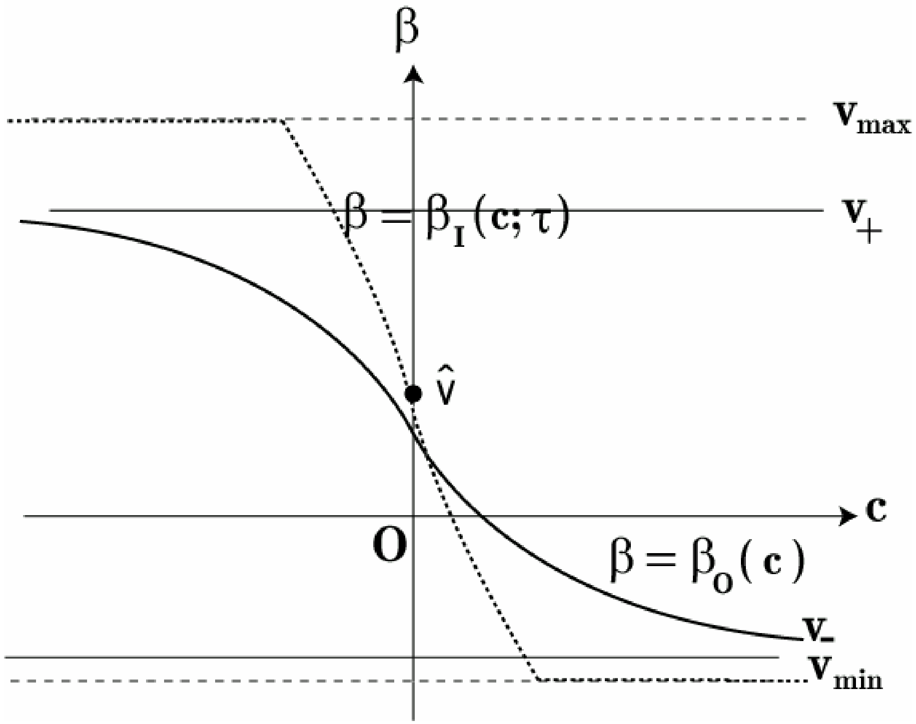


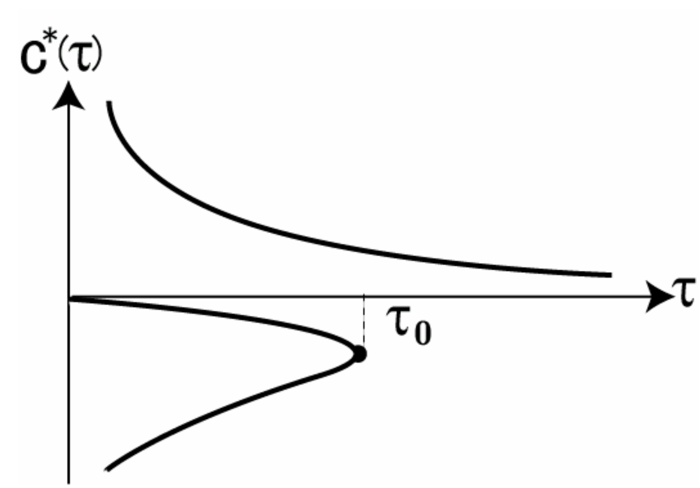
$\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$





$\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$





$$(A0)\begin{cases} \varepsilon^2(u_\pm)_{zz} - \varepsilon\tau c(u_\pm)_z + f(u_\pm, v_\pm) = 0 \\ (v_\pm)_{zz} - c(v_\pm)_z + g(u_\pm, v_\pm) = 0 \\ u_\pm(\pm\infty) = u_\pm, u_\pm(0) = \alpha \\ v_\pm(\pm\infty) = v_\pm, u_\pm(0) = \beta \end{cases}, z \in \mathbf{R}_\pm$$

Put

$$w_\pm(z;\varepsilon,\tau;c,\beta) = \varepsilon(u_\pm)_z(z;\varepsilon,\tau;c,\beta),\ \ s_\pm(z;\varepsilon,\tau;c,\beta) = (v_\pm)_z(z;\varepsilon,\tau;c,\beta)$$

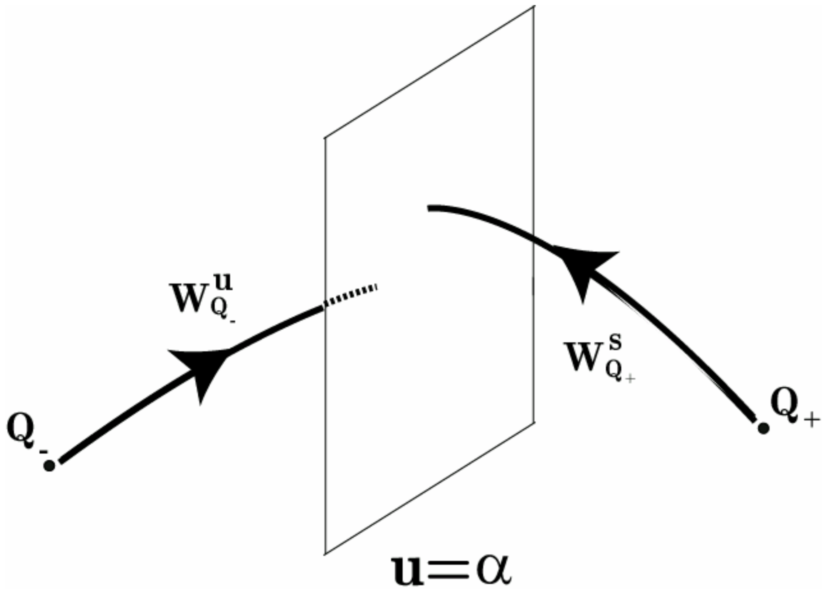
$$\begin{cases} \varepsilon(u_\pm)_z &= w_\pm \\ \varepsilon(w_\pm)_z &= \tau c w_\pm - f(u_\pm, v_\pm) \\ (v_\pm)_z &= s^\pm \\ (s_\pm)_z &= c s_\pm - g(u_\pm, v_\pm) \\ (u_\pm, w_\pm, v_\pm, s_\pm)(\pm\infty) = (u_\pm, 0, v_\pm, 0) \equiv Q_\pm \\ (u_\pm, v_\pm)(0) = (\alpha, \beta) \end{cases}, \ \ z \in \mathbf{R}_\pm$$

2-dim unstable manifolds of Q_-:

$$W^u_{Q_-} \equiv \left\{ \begin{bmatrix} u_- \\ w_- \\ v_- \\ s_- \end{bmatrix} (z;\varepsilon,\tau;c,\beta) \mid z \in \mathbf{R}_-, \beta \in (v_-, v_+) \right\}$$

2-dim stable manifolds of Q_+:

$$W^s_{Q_+} \equiv \left\{ \begin{bmatrix} u_+ \\ w_+ \\ v_+ \\ s_+ \end{bmatrix} (z;\varepsilon,\tau;c,\beta) \mid z \in \mathbf{R}_+, \beta \in (v_-, v_+) \right\}$$



Existence of heteroclinic orbits connecting two points Q_+ and Q_-

The distance between two manifolds $W^u_{Q_+}$ and $W^s_{Q_-}$ $=$ 0

安定性

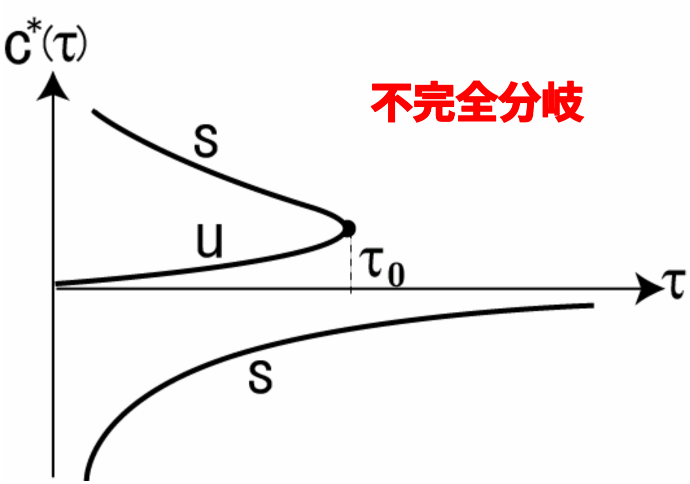
$$\begin{cases} \varepsilon\tau u_t &= \varepsilon^2 u_{zz} - \varepsilon\tau c u_z + f(u,v) \\ v_t &= v_{zz} - c v_z + g(u,v) \\ (u,v)(t,-\infty) = (u_-, v_-) \\ (u,v)(t,+\infty) = (u_+, v_+) \end{cases} , z \in \mathbf{R}$$

線形化固有値問題を特異摂動法で解く

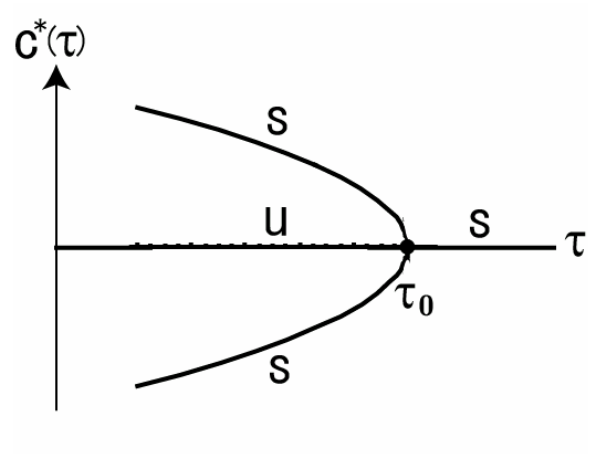
安定指標 ---- 多様体の横断性

---- (c, β) 平面における曲線の横断性

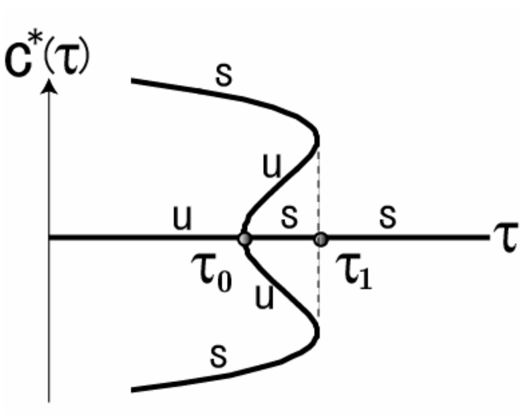
$\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$



$\gamma = \gamma_1$ super-critical



$\gamma = \gamma_1$ sub-critical



$\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$